Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 13--14, 2012.

Об асимптотических оценках числа решений систем булевых уравнений с зависимыми переменными

Э. В. Егиазарян

Кафедра дискретной математики и теоретической информатики ЕГУ

Известно, что многие вопросы функционирования дискретных управляющих систем сводятся к решению систем булевых уравнений, либо к определению числа их решений. Таковы, например, некоторые задачи синтеза цифровых автоматов, нахождения внутренне и внешне устойчивых множеств в графе, вопросы теории тестов и др. Естественно предполагать, что множество решений системы будет сужаться с ростом числа уравнений и при достаточно большом количестве последних будет пустым. В работах [1,2] обосновывается это предположение для “типичного” случая, а также приводятся оценки числа решений “почти всех” систем из l неэквивалентных уравнений как с n независимыми, так и с m зависимыми (и n независимыми) переменными. В настоящей работе исследуется класс уравнений с “ неявными” m зависимыми переменными.

Приведем необходимые определения.

Пусть $\{M(r)\}_{r=1}^{\infty}$-такое семейство множеств, что $||M(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$ ($|M|$ обозначает число элементов множества M), а $M^E(r)$-подмножество тех элементов из $M(r)$, которые обладают заданным свойством E. Говорят, что почти все элементы множества $M(r)$ обладают свойством E, если $|M^E(r)|/|M(r)| \to 1$ при $n \to \infty$(“типичный” случай).

Всюду под $\log$ понимается логарифм по основанию 2.

Обозначим через $S_{n,l}$ множество всех систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_i(x_1,\dots,x_n) = 1 \\ i = 1,\dots,l \end{cases}$$

где $f_i(x_1,\dots,x_n), i = 1,\dots,l -$ попарно отличающиеся булевые функции от переменных $x_1, x_2,\dots,x_n$

Пусть $B = \{0,1\}, B^n = \{\widetilde{\alpha} / \widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n), \alpha_i \in B, 1 \le i \le n\}$. Набор $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n) \in B^n$ называется решением системы (1) , если $\begin{cases} f_i(\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots,\alpha_n) = 1 \\ i = 1,\dots,l \end{cases}$

Сопоставим каждой системе S множества $S_{n,l}$ целочисленный параметр $\tau(S)$, равный числу ее решений. Справедлива следующая

Теорема 1 (см [1,2]).

1. Если $n - \ell \to \infty (n \to \infty)$, то для почти всех систем S множества $S_{n,l}$ имеет место $\tau(S) \sim 2^{n-l}$.

2. Если $n-\ell \to -\infty (n \to \infty)$, то почти все системы S множества $S_{n,l}$ не имеют решений.

3. Если $n-\ell$ ограничено при $n,l \to \infty$,то для почти всех систем S множества $S_{n,l}$ число решений ограничено сверху произвольной функцией $\varphi(n)$, удовлетворяющей условию $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $S_{n,l,m}$ множество всех систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_i(x_1,\dots x_n, y_1,\dots,y_m)=1 \\ i=1,\dots,l \end{cases},$$

где $y_j = \varphi_j(x_1,\cdots,x_n)$ $(j=\overline{1,m})$ –неизвестные булевые функции ,зависящие от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; $f_i \neq f_j$, при $i \neq j$.

Набор булевых функций $(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n))$ называется решением системы (4), если при подстановке в (4) вместо переменных y_j функций $\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)$ $(j=\overline{1,m})$ все уравнения обращаются в тождества.

Сопоставим каждой системе S множества $S_{n,l,m}$ целочисленный параметр $t(S)$, равный числу ее решений. Справедлива следующая

Теорема 2 (см [2]).

1. Если $m-l-n \to \infty (n,m \to \infty)$, то для почти всех систем S множества $S_{n,l,m}$ имеет место $t(S) \sim 2^{(m-l)2^n}$.

2. Если $m-l-[\log n(1+2^{-l})\ln 2] \geq 1$ для достаточно больших m и n, то почти все системы S множества $S_{n,l,m}$ имеют хотя бы одно решение.

3. Если $m-l-[\log n(1+2^{-l})\ln 2] \leq 0$ для достаточно больших m и n, то почти все системы S множества $S_{n,l,m}$ не имеют решений.

Рассмотрим теперь множество $S'_{n,l,m}$ всех систем уравнений вида

$$\begin{cases} f_i(y_1,\dots,y_m)=1 \\ i=1,\dots,l \end{cases}, \quad f_i \neq f_j \text{ при } i \neq j.$$

Относительно числа решений $t(S)$ систем из $S'_{n,l,m}$ справедлива следующая

Теорема 3.

1. Если $\log(m-\ell)-n \to \infty (m,n \to \infty)$,то для почти всех систем множества $S'_{n,l,m}$ имеет место $t(S) \sim 2^{(m-l)2^n}$.

2. Если $m-l \to -\infty (m,l \to \infty)$, то почти все системы S множества $S'_{n,l,m}$ не имеют решений.

Список Литературы

1.Егиазарян Э.В. Оценки, связанные с числом решений булевых уравнений. Сб. вопросы кибернетики, комбинаторный анализ и теория графов, Москва, 1981.

2.Егиазарян Э.В. Метрические свойства систем булевых уравнений. ДАН Арм.ССР, т. 72, N2, 1981.